968 Topological space ノ Regularity 特ニ Complete regularity ニツイテ

乙部 好一（東大學生）

§1. topological space ノ regularity ニツイテ.

R ヲ任意ノ Hausdorff space（即チ R ノ相異ル任意ノ二点ハ相素ナル近傍ヲ有スル topological space）トスル. R ノ一点 p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シ, $U(p) \supset \overline{V}(p)$（bar ハ closure ヲ示ス）ナル p ノ近傍 $V(p)$ ガ存在スルトキ p ヲ regular point トイヒ, Hausdorff space R ノ任意ノ点ガ regular point デアルトキ, R ハ regular space ト呼バレルガ, 此ノ Trennungsaxiom ヲ少シク精シク調ベテミタイ. 其ノタメニ先ヅ概念的ニ次ノ定義ヲスル.

定義1. index ノ ordered set I ガ順序型 μ ヲモツトスル. Hausdorff space R ノ一点 p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ, I ノ各要素 ι ニ對應スル p ノ近傍 $V_\iota(p)$ ガ存在シテ（I ノ $\{V_\iota(p)\}$ ヘノ mapping ハ one-to-one ナルヲ要シナイ）.

(1) 任意ノ $\iota \in I$ ニツキ $\quad U(p) \supset \overline{V}_\iota(p)$

(2) $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\quad V_\iota(p) \supset \overline{V}_\kappa(p)$

ナルトキノ点 p ハ Trennungs axiom $T(\mu)$ ヲ満足スル或ハ $T(\mu)$-point デアルト呼ブ. R ノ各点ガ $T(\mu)$-point

ナルトキ R ハ $T(\mu)$-space デアルトイフ.（点 p ノ近傍トハ p ヲ含ム R デノ open set デアルトスル即チ absolute ナ近傍系ヲ特ニ断ラナイ限リ考ヘルコトニスル）

注意1. 特ニ $\mu=0$ 即チ I ガ空集合デアルトキヲモ考ヘルコトニスレバ, Hausdorff space トハ $T(0)$-space ナルコトニ外ナラナイ。ナホ I ノイヅレノ要素ニモ先立ツ 0 ナル indesc ヲ附加シテ上記定義ニ於ケル $U(p)$ ヲ $V_0(p)$ トオケバ, 形式的ニ條件 (1) ハ不要トナル。

注意2. R ノ一点 p ガ regular point デアルコトハ $T(1)$-point デアルコトデアルガ, 夫ハ $T(\omega)$-point（ω ハ凡テノ自然数ヲ通常ノ順序ヲ付ケタトキノ順序型）デアルコトニ同値デアル. 何トナレバ $T(\omega)$ ガ成立スレバ勿論 $T(1)$ ガ成立スルガ, 逆ニ $T(1)$ ナラバ p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ $U(p)\supset\overline{V_1(p)}$ ナル近傍 $V_1(p)$ ガアル. ヨッテ亦 $T(1)$ ニヨリ $V_1(p)\supset\overline{V_2(p)}$ ナル近傍 $V_2(p)$ ガ存在スル. カクシテ p ハ $T(\omega)$ ヲ満足スルコトニナル。一般ニ $T(\mu+1)$-point ハ $T(\mu+\omega)$-point 及ビ $T((\mu+1)\omega)$-point ニ同ジイ. 例ヘバ $T(\omega^*)$ ハ $T(\omega^*+\omega)$ ト同値デアル。

$\mu\neq 0$ ナラバ $T(\mu)$-space ハ勿論 regular space デアル。

定理1. completery regular space ト $T(\eta)$-space トハ相等シイ. 但シ η ハスベテノ有理数

ヲ通常ノ大小ニ従ッテ順序ヅケタトキノ順序型デアル。

（証明） R ガ completely regular デアルトスル。任意ノ点 $p \in R$ ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ヲトルモ $0 \leqq f(x) \leqq 1$ $(x \in R)$, $f(p) = 1$, $x \in R - U(p)$ ナラバ $f(x) = 0$ ナル R ニ於ケル連続函数 f ガ存在スル。$0 < r < 1$ ナル凡テノ有理数 r ノ集合ヲ I トシ，$r < r'$ ヲ $r < r'$ ニヨリ定義スレバ I ノ順序型ハ η デアル。$f(x) > r$, $r \in I$ ナル $x \in R$ ノ集合ヲ V_r トスレバ，明カニ V_r ハ p ノ近傍デ $r < r'$ ナラバ $V_r \supset \overline{V_{r'}}$ 且ッ $U(p) \supset \overline{V}_r$ デアル。ヨッテ p ハ $T(\eta)$-point デアル。

逆ニ Hausdorff space R ノ任意ノ点 p ガ $T(\eta)$ ヲ満足シテヰルトスル。p ヲ含マナイ R ノ任意ノ closed set A ヲトルモ $U(p) = R - A$ ハ p ノ近傍ヲナスカラ，$T(\eta)$ ニヨリ $0 < r < r' < 1$ ナル任意ノ有理数 r, r' ニ対シ（η ハ夫ト逆ノ順序ヲツケタ η^* ト相等シイコトニ注意）

$$U(p) > \overline{V_{r'}(p)}, \quad V_{r'}(p) \supset \overline{V_r(p)}$$

ナル p ノ近傍 $V_r(p), V_{r'}(p)$ ガ存在スル。カカル以上ハ $f(p) = 0$, $f(A) = 1$, $0 \leqq f(x) \leqq 1$ $(x \in R)$ ナル R ニ於ケル連続函数 f ヲ構成スルコトガ出来ルコトハ，normal space ニ於ケル連続函数ノ interpolation theorem ト全ク同様デアル。ヨッテ R ハ completely regular デアル。

以上ノ様ナ regularity ノ type ガ topologically ニドノ様ナ意味ヲモツカ，又ハ regularity ニ対スル如何

様ナ分類ヲナシテヰルカヲ次ニ考ヘテミタイ。

§2. regularity ノ type ト一般化セラレタ absolute closedness トノ関係.

Hausdorff space ノ "absolutely closed" (H-abgeschlossen) ナル概念ヲ §1 ニテ定義シタ regularity ノ各 type ニ拡張スル.

<u>定義2</u> μ ヲ一ツノ順序型トスル. Hausdorff space R ガ $\mathcal{R} \supset R$ ナル<u>任意</u>ノ Hausdorff space $\mathcal{R}$ ニツキ, $\mathcal{R}-R$ ニ含マレル<u>任意</u>ノ $T(\mu)$-point p ニ対シテモ $p \notin \overline{R}^{\mathcal{R}}$ (—$\mathcal{R}$ ハ $\mathcal{R}$ ニ於ケル clossen ヲ表ス) ナルトキ R ハ $T(\mu)$-closed デアルトイフ。

特ニ $\mu=0$ トスレバ, $T(0)$-closed トハ absolutely closed ナルコトデアル. R ガ $T(0)$-closed デアルナラバ任意ノ順序型 μ ニツイテモ $T(\mu)$-closed デアルガ, 逆ハ一般ニ成立シナイ。

最モ標準的ナ μ ノ category トシテ次ノ定義ヲ假ニ定メルコトニスル。

<u>定義3</u> 順序型 μ ト逆ノ順序ヲモツ順序型ヲ μ^* ニテ表ハス. $\mu^*=\mu$ ナルトキ μ ハ inversible デアルトイフコトニスル. 又順序型 μ ヲモツ ordered set I ノ任意ノ要素 $\iota \in I$ ニ對シテ, $\iota < \kappa$, $\kappa \in I$ ナル κ ノ集合 I_ι ガ, I ト同ジ順序ニ関シテ, 順序型 μ ヲ有スルナラバ, μ ハ uniform ト呼ブコトニスル (コノ定義ガ I ノ取方ニ関係シナイコトハ明カ)

例ヘバ $0, \omega, \eta, \omega^2, \omega\eta, \eta\omega$ ハ uniform ナ順序型デアリ; $0, \eta, \omega^*+\omega$ ハ inversible デアル. 0 ナラザル自然數 n ハ inversible デアルガ, uniform デハナイ。

Hausdorff space ガ absolutely closed ナルタメノ條件ヲ示ス定理 (cf. Alexandroff Hopf. Topologie S. 90) ハ次ノ様ニ拡張サレル。

<u>定理 2.</u> μ ハ uniform ナ順序型トシ, μ ナル順序型ヲモツ index ノ ordered set I ヲトル。

(a) Hausdorff space R ガ $T(\mu)$-closed ナラバ次ノ條件 $(C(\mu))$ ガ成立スル:

$(C(\mu))$: $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ ハ或ル index ノ集合) ガ R ノ任意ノ open covering (G_α ハ R ノ open set) デアルトスレバ —— 即チ $\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} G_\alpha = R$ ナラバ ——, 各 $\alpha \in \mathfrak{M}$ ニ對シ

(i) $\iota \in I$ ナラバ $\quad G_\alpha = U_{\alpha 0} \subset U_{\alpha\iota}$

(ii) $\iota, \kappa \in I, \iota < \kappa$ ナラバ $\quad \overline{U_{\alpha\iota}} \subset U_{\alpha\kappa}$

ナル R ノ open set ノ<u>任意ノ</u> system $\{U_{\alpha i}\}$ ($\alpha \in \mathfrak{M}$, $\iota \in I$) ヲトレモ, $\{G_\alpha\}$ ノ或ル有限個ノ subset $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots \cdots, G_{\alpha_N}$ ト或ル $\iota_0 \in I$ トヲ選ミ

(iii) $$\sum_{j=1}^{N} \overline{U_{\alpha_j \iota_0}} = R$$

ナラシメルコトガ出来ル。

(b) 逆ニ $T(\mu^*)$-space R ガ條件 $(C(\mu))$ ヲ滿足シテキルナラバ R ハ absolutely closed デアル（從ッテ勿論 $T(\mu)$-closed デアル）．

（證明）［前半(a)ノ證明］歸謬法ニヨル．今モシ條件 $(C(\mu))$ ガ成立シナイトスル．然ラバ R ノ<u>或ル</u> open covering $\{G_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{M})$ ガアッテ，各 α ニツキ (i), (ii) ヲ滿足スル<u>或ル</u> open set ノ system $\{U_{\alpha\iota}\}$ ガ存在シテ，$\mathfrak{M}$ ノ<u>任意ノ有限個ナ</u> subset $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 及ビ<u>任意ノ</u> $\iota\in I$ ニ對シ

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n}\overline{U_{\alpha_j\iota}}\neq R$$

ソコデ R ニ屬シナイ一點 ξ ヲトリ，$\mathcal{R}=R+\xi$ ナル set ニ次ノ樣ナ topology ヲ附スル；
R ニ屬スル任意ノ點ノ近傍系ハ R ニ於テアッタ通リトシ，ξ ノ決定近傍系トシテ

$$(2)\qquad V(\xi)=\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U_{\alpha_j\iota}}\right),\quad \alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n\in\mathfrak{M},\ \iota\in I$$

ヲトル．R ノ點ニツイテハ明カデアルカラ，ξ ニツイテ其ノ近傍系 (2) ガ近傍系ノ公理ヲ滿足シテヰルコトヲ示サウ．ξ ノ任意ノ近傍 $V(\xi)$ ガ ξ ヲ含ムコトハ (2) ヨリ明カ．又 ξ ノ任意ノ二ツノ近傍 (2) 及ビ $V'(\xi)=\xi+\left(R-\sum_{k=1}^{m}\overline{U_{\alpha'_k\kappa}}\right)$ ヲトレバ，$\kappa\leqq\iota$ カ $\iota\leqq\kappa$ デアルガ，例ヘバ後者ヲトレバ，

$$W(\xi)=\xi+\left(R-\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\kappa}+\sum_{k=1}^{m}\overline{U}_{\alpha_k,k}\right)\right)$$

ハξノ決定近傍系ニ屬シ，且ツ (ii) ヨリ $\overline{U}_{\alpha_k,\iota}\subset\overline{U}_{\alpha_k,k}$ $(k=1,\cdots\cdots,m)$ デアルカラ

$$W(\xi)\subset U(\xi)\cdot V(\xi)$$

次ニ $U(\xi)$ ヲ $p\neq\xi$ ナル任意ノ點 p ヲトレバ $p\in R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\iota}$

(i) 及ビ n ガ有限ナルコトヨリ $R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\iota}$ ハ R ニ於ケル空ナラザル open set デアルカラ，$U(p)\subset R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\iota}\subset U(\xi)$ ナル點 p ノ R ニ於ケル近傍 $U(p)$ ガアル．$p\in R$ ダカラ $U(p)$ ハ $\mathcal{R}$ ニ於ケル p ノ近傍デアル．

以上ニヨッテ $\mathcal{R}=R+\xi$ ガ topological space ヲナスコトが分ッタガ，更ニ $\mathcal{R}$ ガ Hausdorff space デアルコトハ，R ノ二點ニツイテハ明カダカラ，$p\in R$ ナル p ト ξ トガ相素ナル（$\mathcal{R}$ ニ於ケル）近傍ヲ有スルコトヲ云ヘバヨイ．ソレハ $p\in G_{\alpha_1}$ ナル G_{α_1} ヲトリ，勝手ナ $\iota\in I$ ヲトレバ (i) ニヨリ $U_{\alpha_1,\iota}$ ハ p ノ R ニ於ケル從ッテ $\mathcal{R}$ ニ於ケル近傍デアル．ヨッテ $U(\xi)=\xi+(R-\overline{U}_{\alpha_1,\iota})$ ヲトレバ

$$U_{\alpha_1,\iota}\cdot U(\xi)=0$$

ξ ガ $\mathcal{R}$ ニテ $T(\mu)$-point ナルコトヲ云ハウ．ξ ノ任意ノ近傍 (2) ヲトル．$\iota<\kappa\in I$ ナル κ ノナス ordered set I_ι ハ，μ ガ uniform ナル假定ニヨリ，ヤハリ順序型 μ ヲモツ（定義3）而カモカヽル κ ニツキ

$\left\{\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\kappa}\right)\right\}$ $(\kappa\in I_\iota)$ ハ (ii) ニヨリ $U(\xi)$ ニ含

マレルξノ近傍ノ system ヲナシ且ツ $\kappa<\kappa'$ ナルトキ (ii) ヨリ $\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\cdot\kappa}\subset\sum_{j=1}^{n}U_{\alpha_j\cdot\kappa'}$ デアルカラ

$$\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\cdot\kappa}\right)\supset\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}U_{\alpha_j\cdot\kappa'}\right)=\overline{\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}U_{\alpha_j\cdot\kappa'}\right)}$$

$$\supset\overline{\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\cdot\kappa'}\right)}=\overline{\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\cdot\kappa'}\right)}^{\mathcal{R}}$$

$\left(R-\sum_{j=1}^{n}U_{\alpha_j\kappa'}\right.$ ハ R ニテ closed ダカラ$\left.\right)$

ヨッテ定義 I ニヨリ ξ ハ $\mathcal{R}$ ニテ $T(\mu)$-point デアル。而モ (1) ニヨリ任意ノ $U(\xi)$ ニツキ $RU(\xi)\neq 0$ ダカラ $\xi\in\overline{R}^{\mathcal{R}}$. ヨッテ定義2ニヨリ R ハ $T(\mu)$-closed デナイコトニナッテ假定ニ反スル。

(注意) 明カニ R ハ $\mathcal{R}=R+\xi$ ノ dense ナ subset デアリ；且ツ R ノ点ノ近傍ハ $\mathcal{R}$ ニ於テモ R (relative space トシテ) ニ於テモ不変デアル。此事ハ後ニ用キル。

(後半 (b) ノ証明)　$T(\mu^*)$-space R が條件 $(C(\mu))$ ヲ満足シテキルトスル。$\mathcal{R}$ ヲ $\mathcal{R}\supsetneq R$ ナル任意ノ Hausdorff space トシ，$\xi\in\mathcal{R}-R$ ナル任意ノ一点 ξ ヲトル。R ハ Hausdorff space デアルカラ R ノ任意ノ点 p ニハ $\overline{U}^{\mathcal{R}}(p)\not\ni\xi$ ナル ($\mathcal{R}$ ニ於ケル) 近傍 $U(p)$ が存在スル。$RU(p)$ ハ R ニ於ケル p ノ近傍デアリ，R が $T(\mu^*)$-space デアルカラ，定義1ニヨリ μ ナル順序型ノ ordered set I ニツキ

$$RU(p) \supset \overline{U}_\iota(p) \ni p, \qquad \iota \in I$$

且ツ $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\overline{U}_\iota(p) \subset U_\kappa(p)$

ナル p ノ R ニ於ケル近傍ノ system $\{U_\iota(p)\}$ $(\iota \in I)$ ガ存在スル．勝手ナ一ツノ $\gamma \in I$ ヲトレバ，μ ガ uniform デアルトイフ假定カラ（定義3）$\gamma < \iota \in I$ ナル ι ノ ordered set I_γ ガ亦順序型 μ ヲモツ．サテ $\{U_\gamma(p)\}$ $(p \in R)$ ハ R ノ open covering ヲナスカラ條件 $(C(\mu))$ ニ於テ I ノ代リニ I_γ ヲオキ代ヘレバ，有限個ノ点 $p_1, \cdots\cdots p_N \in R$ ト $\iota_0 \in I_\gamma$ ナル或ル ι_0 ガ選べバ

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

$\overline{U}_{\iota_0}(p_j) \subset RU(p_j) \subset U(p_j)$ ト $\overline{U}^{\mathfrak{R}}(p) \not\ni \xi$ トヨリ

$$\overline{R}^{\mathfrak{R}} = \overline{\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j)}^{\mathfrak{R}} \subset \sum_{j=1}^{N} \overline{U}^{\mathfrak{R}}(p_j) \not\ni \xi$$

ヨッテ $\mathfrak{R} - R$ ノ任意ノ点 ξ ハ $\overline{R}^{\mathfrak{R}}$ ニ含マレナイ．即チ R ハ absolutely closed ($\mathfrak{T}(0)$-closed) デアル（從ッテ $\mathfrak{T}(\mu)$-closed デアル）

（証終リ）

上記定理ニ於テ $\mu = 0$ トスレバ —— $G_\alpha = U_{\alpha_0}$ ト形式的ニオイテ —— Hausdorff space ガ absolutely closed ナルタメノ必要且ツ十分條件ヲ示ス周知ノ定理トナル。

$\mu = \omega'$ トオケバ regular space R ガ其ノ上ノ任意ノ regular space ニテ closed ナルタメノ必要

條件ハ $(C(\omega))$ デアリ，更ニRガ $\mathfrak{T}(\omega^*)$-space（當然 $\mathfrak{T}(\omega^*+\omega)$-spaceデアル（定義1 注意2））ナラバ $(C(\omega))$ ハ十分條件デアル。

$\mu=\eta$ ナルトキハ，η ハ uniform 且ツ inversible $(\eta^*=\eta)$ デアルカラ，定理1ニヨレバ completely regular space R ガ其ノ上ノ任意ノ completely regular space ニテ closed ナルタメノ必要且十分條件ハ $(C(\eta))$ ガ成立スルコトデアル。

§3. 一般化セラレタ absolute closedness ト bicompactness トノ關係.

定理2ノ條件 $(C(\mu))$ ニヨッテ一般化セラレタ absolute closedness ト bicompactness トノ間ニモ密接ナ關係ガアルコトガ分ル．即チ

定理3. μ ガ 0 ナラザル uniform ナ順序型デアルナラバ，$\mathfrak{T}(\mu^*)$-space R（$\mu\neq 0$ ヨリ Rハ regular デアル）ガ bicompact デアルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハRガ $\mathfrak{T}(\mu)$-closed ナルコトデアル。

（証明）必要ナルコト．定理2ノ條件 $(C(\mu))$ ニ示サレタ如ク，Rノ任意ノ open covering $\{G_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{M})$ ト(i), (ii) ヲ滿足スル任意ノ open set ノ system $\{U_{\alpha_\iota}\}$ $\iota\in I$ ヲトル。$\{G_\alpha\}$ ガ Rノ open covering ダカラ，Rノ bicompact ナルコトヨリ有限個ノ $G_{\alpha_1},\cdots\cdots,G_{\alpha_N}$ ヲトリRヲ cover スルコトガ出來ル．ヨッテ勿論 $(C(\mu))$.

ノ (iii) ガ成立スル．即チ (C(μ)) ガ成立スルカラ定理2(b) ニヨリ R ハ T(μ)-closed (実ハ absolutely closed) デアル．(之迄ハ $\mu \neq 0$ ナル條件ハ使ッテナイカラ $\mu=0$ ニテモ成立スル)

十分ナルコト．R ガ T(μ)-closed デアルトスル．定理2ニヨリ條件 (C(μ)) ガ成立スル．今 R ノ任意ノ open covering $\{G_\rho\}$, $\rho \in \mathfrak{N}$, $\sum_{\rho\in\mathfrak{N}} G_\rho = R$ ヲトル．R ノ任意ノ点 p ニ對シ $p \in G_\rho$ ナル $\rho \in \mathfrak{N}$ ノ一ツヲ $\rho(p)$ トスル．$G_{\rho(p)}$ ハ open 故カラ $U(p) \subset G_{\rho(p)}$ ナル p ノ近傍 $U(p)$ ガアル．R ハ T(μ^*)-space デアルカラ定義1ニヨリ

(1) $\quad U_\iota(p) \ni p, \quad U(p) \supset \overline{U}_\iota(p), \quad \iota \in I$

(I ハ μ ナル順序型ノ index set)

且ツ $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\overline{U}_\iota(p) \subset U_\kappa(p)$ ナル近傍ノ system $\{U_\iota(p)\}$, $\iota \in I$ ガ存在スル．假定 $\mu \neq 0$ ニヨリ $\{U_\iota(p)\}$ ハ空デナイ．定理2(a) ノ証明ノ際ト同様ニ $\gamma \in I$ ヲトレバ $\gamma < \iota \in I$ ナル ι ノ集合 I_γ ハ μ ナル順序型ノ ordered set ヲナスカラ條件 (C(μ)) ニテ $\{U_\gamma(p)\}$ ヲ $\{G_\alpha\}$ トオケバ，アル有限個ノ点 $p_1, \cdots, p_N$，トアル $\gamma < \iota_0 \in I_\gamma$ ナル ι_0 ニツキ

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

ヨッテ (1) ニヨリ

$$\sum_{j=1}^{N} G_{\beta(p_j)} \supset \sum_{j=1}^{N} U(p_j) \supset \sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

即チ有限ノ subsystem $\{G_{\beta(p_j)}\}$ $(j=1,\cdots,N)$ ハ R ノ covering ヲナシテキルカラ R ハ bicompact デアル。

系. μ ガ 0 ナラザル inversible 且ツ uniform ナ順序型ナルトキ（定義3）, $T(\mu)$-space R ガ bicompact デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ R ガ $T(\mu)$-closed ナルコト即チ R ノ上ノ任意ノ $T(\mu)$-space ニテ R ガ closed ナルコトデアル。

特ニ completely regular space R ガ bicompact ナルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ R ガ R ノ上ノ任意ノ completely regular space ニテ closed ナルコトデアル。

（証明） $\mu \neq 0$ デ uniform ダカラ定理ガ適用出来, シカモ $\mu^* = \mu$ デアルカラ, 後半ハ η ガ上記條件ニ適スルカラ定理1ニヨリ.

§4. bicompact Hausdorff space ヘノ embedding ニツイテ.

Lemma. Hausdorff space $\mathfrak{R}$ ノ dense ナ subset R ノ cardinal number ヲ $\aleph_\nu$ トスレバ, $\mathfrak{R}$ ノ cardinal number ハ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ。

（証明） $\mathfrak{R}$ ノ各点 p ニ, $\mathfrak{R}$ ニ於ケル p ノ凡テノ近傍

ノ system $\{U(p)\}$ が對應スル.

R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアルカラ $RU(p) \neq 0$. ヨッテ $\{RU(p)\}$ ハ R (relative space トシテ) ニ於ケル空ナラザル open sets ノ system ヲナシテヰル. $p, q \in \mathfrak{R}$, $p \neq q$ トスレバ, $\mathfrak{R}$ ハ Hausdorff space デアルカラ $U_0(p)U_0(q) = 0$ ナル $U_0(p)$, $U_0(q)$ ガアル. ヨッテ

(1) $\quad RU_0(p) \cdot RU_0(q) = 0$

任意ノ $U(p)$ ニツキ $U(p)U_0(p)$ ハ p ノ近傍デアルカラ, ヤハリ $R \cdot U(p)U_0(p) \neq 0$. ヨッテ

(2) $\quad RU(p) \cdot RU_0(p) \neq 0$

(1), (2) ニヨリ任意ノ $U(p)$ ニツキ $RU(p) \neq RU_0(q)$. ヨッテ R ニ於ケル sets ノ system トシテ $\{RU(p)\} \neq \{RU(q)\}$. 故ニ, モシ $\{RU(p)\} = \{RU(q)\}$ ナラバ $p = q$.

所ガ R ノ cardinal number ハ $\aleph_\nu$ ダカラ R ノ凡テノ (open) subsets ヨリナル system ノ凡テノ集合ノ cardinal number ハ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ. ヨッテ $\mathfrak{R}$ ノ cardinal number モ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ。

<u>定理4.</u> μ ガ uniform 且ツ inversible ($\mu^* = \mu$) ナル順序型デアルナラバ, 任意ノ $T(\mu)$-space R ニハ次ノ二ツノ條件ヲ滿足スル $T(\mu)$-space $\mathfrak{R}$ ガ存在スル:

(1°) $\quad \mathfrak{R} \supset R$, 且ツ R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアル.

(2°) $\quad \mathfrak{R}$ ハ $T(\mu)$-closed デアル (實ハ absolutely closed トナル)

若シ更ニ $\mu \neq 0$ デアルナラバ此ノ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact normal デアリ，且ツ absolutely closed デアル。

（証明） 帰謬法ニヨル。 即チ (1°), (2°) ヲ満足スル $\mathrm{T}(\mu)$-space $\mathfrak{R}$ ガ存在シナイトスル。即チ條件(P)ヲ満足スル任意ノ $\mathrm{T}(\mu)$-space R ハ $\mathrm{T}(\mu)$-closed デナイトスル。

然ラバ勿論 R ハ (1°) ヲ満足スル $\mathrm{T}(\mu)$-space ダカラ $\mathrm{T}(\mu)$-closed デナイ。

今 R ノ cardinal number ヲ $\aleph_\nu$ トシ，$2^{2^{\aleph_\nu}} < \aleph_\lambda$ ナルーツノ cardinal number $\aleph_\lambda$ ヲトリ，其ノ Anfangszahl ヲ ω_λ トスル。 シカラバ（$R = \mathfrak{R}_0$ トオク） $0 \leqq \pi \leqq \omega_\lambda$ ナル任意ノ ordinal number π ニ對シテ次ノ條件ヲモツ $\mathrm{T}(\mu)$-space $\mathfrak{R}_\pi$ ガ存在スル： (a) $\mathfrak{R}_\pi$ ハ (1°) ヲ満足スル。 (b) $0 \leqq \rho < \pi$ ナル任意ノ ordinal number ρ ニツキ $\mathfrak{R}_\rho \subsetneqq \mathfrak{R}_\pi$ デ，而モ $\mathfrak{R}_\rho$ ニ属スル任意ノ点ノ近傍ハ $\mathfrak{R}_\rho$ ニ於テモ $\mathfrak{R}_\pi$ ニ於テモ不変デアル，
(c) $\mathfrak{R}_\pi$ ハ $\mathrm{T}(\mu)$-closed デナイ。

之レヲ transfinite induction ニヨッテ証明シヨウ。 先ヅ π ガ孤立数ナルトキ，特ニ $\pi = 0$ ナルトキハ $\mathfrak{R}_0 = R$ トオケバ trivial ニ成立スル。 $\neq 0$ ノトキ induction ノ假定ニヨリ $\pi - 1$ ニツキ上記 (a), (b), (c) ガ成立シテヰル。特ニ (c) ニヨリ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ハ $\mathrm{T}(\mu)$-closed ナラザル $\mathrm{T}(\mu)$-space デアル。ヨッテ定理 2 (b) ト $\mu^* = \mu$

ニヨリ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ハ條件 $(C(\mu))$ ヲ滿足シナイ。ソコデ同ジク定理 2(a) ノ證明（特ニ（注意））ニ示サレタ如ク $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ 外ノ一点 ξ_π ヲトリ $\mathfrak{R}_\pi = \mathfrak{R}_{\pi-1} + \xi_\pi$ トオケバ $\mathfrak{R}_\pi$ ガ $T(\mu)$ -space デ且ツ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ガ $\mathfrak{R}_\pi$ デ dense デアリ，且ツ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ屬スル点ノ近傍ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニテモ $\mathfrak{R}_\pi$ ニテモ不変ナルヤウナ $\mathfrak{R}_\pi$ ガ存在スル。

既ニ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ屬シテヰル点 p ノ任意ノ近傍ガ R ト空ナラザル共通部分ヲモツコトハ induction ノ假定ノ (a) ニヨッテ明カデアリ；又 ξ_π ノ任意ノ近傍 $U(\xi_\pi)$ ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ト少クモ一点 p ヲ共有スル；$\mathfrak{R}_{\pi-1}U(\xi_\pi)$ ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ノ点 p ノ近傍デアルカラ、今述ベタ所ニヨリ R ト素ニハナラナイ，從テ $U(\xi_\pi)$ モ R ト素ニナラナイ. 即チ R_π ニテ R ハ dense デアル. 之ニテ π ニツキ (a) ガ云ヘタ。

次ニ $0 \leqq \rho \leqq \pi$ ナル任意ノ $\mathfrak{R}_\rho$ ニツイテハ $\mathfrak{R}_\rho < \mathfrak{R}_{\pi-1} < \mathfrak{R}_\pi$ デ，又 $\mathfrak{R}_\rho$ ニ屬スル点ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニモ屬シテヰルカラ induction ノ假定（$\pi-1$ ニ對スル）ノ (b) ニヨリ，ソノ点ノ $\mathfrak{R}_\rho$ ニ於ケル近傍ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ於ケルモノト，從ッテ亦上記 $\mathfrak{R}_\pi$ ノ構成ニヨリ $\mathfrak{R}_\pi$ ニ於ケルノト同一デアル．更ニ歸納法ノ假定ニヨリ —— 且ツ $\mathfrak{R}_\pi$ ハ (1°) ヲ滿足スル $T(\mu)$-space デアルコトガワカッタカラ —— $\mathfrak{R}_\pi$ モ亦 $T(\mu)$-closed デナイ。

次ニ π ガ極限數デアルトスル．シカルトキ $\mathfrak{R}_\pi = \sum_{0 \leqq \rho < \pi} \mathfrak{R}_\rho$ トオキ，ソノ topology トシテ，任意ノ $p \in \mathfrak{R}_\pi$ ニツキ $p \in \mathfrak{R}_\rho$ ナル最小ノ ρ（ordinal number ノ性質

ニヨリ，タシカニ存在スル）ヲトリ R_ρ ニ於ケル p ノ近傍ヲ以テ R_π ニ於ケル p ノ近傍トスル induction ノ假定ニヨリ R_ρ ハ $T(\mu)$-space ダカラ p モ R_ρ 從ッテ R_π ニ於テ $T(\mu)$ point デアル．p ハ任意デアッタカラ R_π ハ $T(\mu)$-space デアル。R_π ガ (a), (b) ヲ満足スルコトモ容易ニ証明サレル。例ヘバ $0\leq\rho<\pi$ トスレバ π ハ極限数ダカラ $\rho<\rho'<\pi$ ナル ρ' ガアル．ρ' ニツイテハ (b) ガ云ヘテヰルカラ $R_\rho\subseteq R_{\rho'}\subset R_\pi$．(c) ハ (a) ト帰謬法ノ假定カラ明カデアル。以上ニテ transfinite induction ハ完成シタ。

ヨッテ特ニ $\omega=\omega_\lambda$ トスレバ R_{ω_λ} ノ cardinal number ハ (b) ニヨリ $\geq\aleph_\lambda>2^{2^{\aleph_\lambda}}$． 所ガ (a) ト lemma ニヨリ夫ハ $\leq 2^{2^{\aleph_\nu}}$ デナケレバナラヌ．之レハ矛盾デアル。

ヨッテ定理ニ示サレタ R ノ存在ガ証明出来タ．更ニ $\mu\neq 0$ ナルトキハ定理3ノ系ニヨリ，コノ R ハ bicompact デアリ，且ツ regular space デアルカラ normal デアル，又 absolutely closed デアル。

（$\mu=0$ ナラバ $T(0)$-closed トハ absolutely closed デアルカラ実ハ R ハ常ニ absolutely closed デアル）

特ニ $\mu=0$ トオクト定理ノ前半ニヨリ

<u>系1.</u> 任意ノ Hausdorff space R ニハ，R ヲ dense ナ subspace トスル absolutely closed ナ

Hausdorff space $\mathcal{R}$ が存在スル.

<u>系2</u>. 任意ノ completely regular space R ニハ, R ヲ dense ナ subspace トスル absolutely closed 且 bicompact ナ normal space $\mathcal{R}$ ガ存在スル。

(証明) η ハ uniform inversible デ $\neq 0$ デアルカラ.

(注意) 定理4前半ニ於ケル $\mathcal{R}$ デ, 互ニ homeomorphic デナイ二ツノ $\mathcal{R}_1$ ト $\mathcal{R}_2$ トガ存在スルトスレバ, R ヲ固定スルヤウニ一方ヲ他方ニ embed スルコトハ出来ナイ。

何トナレバ, 例ヘバ $R\subset\mathcal{R}_1\subset\mathcal{R}_2$ ト出来ルモノトスレバ $\mathcal{R}_2$ ニ関スル closure (bar ニテ表ハス) ニツイテ $\bar{R}\subset\bar{\mathcal{R}}_1\subset\mathcal{R}_2$. (10) ニヨリ R ハ $\mathcal{R}_2$ デ dense デアルカラ $\bar{R}=\mathcal{R}_2$. 故ニ $\bar{\mathcal{R}}_1=\mathcal{R}_2$. 所ガ $\mathcal{R}'$ ハ $T(\mu)$-closed デアルカラ $\bar{\mathcal{R}}_1=\mathcal{R}_1$. ヨッテ $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_2$ トナルカラ.

<u>系2ノ簡単ナル Example</u>

2次元ノ Euclid space ニ於テ $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ ナル閉正方形ヲトリ R トスル. $y>0$ ナル R ノ点ノ近傍トシテハ, ソノ点ヲ中心トシテ x 軸ト交ハラナイ open sphere ヲトリ, x 軸上ニアル R ノ点ノ近傍トシテ, ソノ点ニテ x 軸ニ切シ $y\geqq 0$ ナル半平面上ニアル open sphere ニ其ノ点ヲ附加シタモノ (勿論イヅレモ R トノ Durchschnitt

ヲトル）ヲトル。

カヽルRガ regular topological space デアッテ而モ normal デナイコトハヨク知ラレテキル（cf. AH. §31, §60. 証明ハ功力，抽象空間論 PP. 86−7）. 更ニRガ completely regular デアルコトハ定理1カラ容易ニ知ラレル．併シ normal デナイカラ勿論 bicompact デナイ．ヨッテ $T(\eta)$−closed デナイ（定理3系）ソコデ上記系2ノ條件ヲ満足スル bicompact normal space $\mathcal{R}$ ノ一ツヲ構成シテミヨウ。

R外ノ一点ξヲトリ $\mathcal{R}=R+\xi$ トシ，Rノ各点ノ近傍ハ元ノ通リトシ，ξノ決定近傍系 $\{U(\xi)\}$ ヲ次ノ如クニトル．Rノx軸上ノ点ノ集合ヲFトシ，Fノ下ノ任意ノ有限集合ヲMトシ

$$(1)\quad U(\xi)=\xi+\sum_{q\in F-M}U(q)$$

ヲ以テξノ近傍トスル・コノ $\mathcal{R}$ ガ topological space ヲナスコトハ容易ニ分ル．更ニ Hausdorff space デアルコトハ，Rノ二点 p, q ニツイテハ明カデアルカラ，Rノ一点pトξトニツイテ云ハウ．$p\in R-F$ ナルトキハRガ regular ダカラ $U(p)\cdot\sum_{q\in F}U(q)=0$ ナル $U(p), U(q)$ $(q\in F)$ ガ存在スル（FハRニテ closed ダカラ）ヨッテ(1)ニテ $M=0$ トスレバ $U(p)\cdot V(\xi)=0$. 又 $p\in F$ デアルトスレバ $F-p$ ハpト相素ナルRニ於ケル closed set ヲナスカラRノ regular ナルコトカラ $U(p)\sum_{q\in F-p}U(q)=0$

ナル $U(p)$, $U(q)$ $(q\in F-p)$ ガアル. ヨッテ (1) ニテ $M-\{p\}$ トスレバ $U(p)U(\xi)=0$.

更ニ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアル. $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ open covering $\{G_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{M})$ ヲトル. $\xi\in G_{\alpha_0}$ ナル G_{α_0} ヲトレバ, アル $U(\xi)\subset G_{\alpha_0}$. コノ $U(\xi)$ ガ (1) デアルトスル. $M=\{p_1,\cdots\cdots,p_m\}$ トスレバ $p_i\in G_{\alpha_i}$ $i=1,\cdots\cdots,m$ ナル G_{α_i} ヲトル. サテ $\mathfrak{R}-(G_{\alpha_0}+G_{\alpha_1}+\cdots\cdots+G_{\alpha_m})$ ハ R ニ於ケル $(\xi+F)$ ヲ含マザル closed set デアルカラ, R ノ topology ニヨリ, 実ハ Euclid space ノ有界閉集合ニ外ナラナイ (homeomorphic). ヨッテ bicompact デアルカラ $\{G_\alpha\}$ ノ有限個 $G_{\alpha_{m+1}},\cdots\cdots,G_{\alpha_{m+n}}$ ニヨッテ cover サレル. 從ッテ $\mathfrak{R}$ ハ $G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1},\cdots\cdots, G_{\alpha_{m+1}},\cdots\cdots, G_{\alpha_{m+n}}$ ナル有限個ノ G_α ニヨッテ cover サレル. 即チ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアル. 明カニ R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアリ, 定理3系ニヨリ $\mathfrak{R}$ ハ absolutely closed デアル. 即チコノ $\mathfrak{R}$ ハ定理4系2ノ $\mathfrak{R}$ ノ一ツデアル。

$\mathfrak{R}$ ハ bicompact Hausdorff space デアルカラ normal デアルガ, ソノ subspace R ハ normal デナイ. 故ニコノ $\mathfrak{R}$ ハ completely normal ナラザル bicompact normal ナ space ノ example ヲナシテヰル。

Tychonoff ハ completely regular space R ニ對シ, $\beta(R)$ ナル space ガ上記系2ノ條件ノ外ニ, R ニ於ケル任意ノ連続函數ガ変域ヲ $\beta(R)$ ニ連續的ニ擴大

出来ルヤウナ $\beta(R)$ ノ存在ト共ガ essentially ニ unique ナルコトヲ証明シタ（R ノ上ノ連續函數ノナス空間ヲ用キテ、cf. Čech, On Bicompact space, Ann. of Math. 38, 1937）所デ上ニ作ッタ $\bar{R}$ ハ $\beta(R)$ ト homeomorphic デナイ. 何トナレバ R ニ於ケル連續函數例ヘバ $f(p)=x$（但シ x ハ R ノ点 p ノ x 座標）ハ，ξ ニ於ケル f ノ値ヲ如何ニ與ヘルモ，$\bar{R}=R+\xi$ ニテ連續トハナリ得ナイカラデアル．此ノコトカラ系２ノ條件ノミデハ $\bar{R}$ ガ essentially ニモ unique ニ決ラナイコトヲ示シテキル。

§5. 再ビ regularity ニツイテ.

§１ニ於テ順序型 μ ニヨッテ概念的ニ regularity ノ條件ヲ強メテ制限ヲナシ，其ノ上デ前§迄ノ性質ヲ調ベタ．併シ二ツノ相異ル順序型 μ, ν ニツイテ $T(\mu)$ ト $T(\nu)$ トガ同値デアル場合ガ少クナイコトハ今迄デモ明カデアル。

先ヅ二ツノ順序型 μ, ν ニツイテ，μ ナル順序型ヲモツ ordered set I ノ或ル subset I_1 ガ I ト同ジ order ニツイテ ν ナル順序型ヲモツトキ，$\nu \leqq \mu$ ト書ク．（cf. Kamke, Mengenlehre, S. 69）之レハ μ, ν ガ特ニ ordinal number ナルトキト調和スル．勿論一般ニハ二ツノ μ, ν ノ間ニ $\leqq$ ナル關係ガ必ズ成立スルコトハ限ラナイ。

然ルトキ定義1カラ明カニ，$\nu \leqq \mu$ ナラバ $T(\mu)$-space ハ同時ニ $T(\nu)$-space デアル。

例ヘバ $T(\mu)$-space ハ必ズ $T(0)$-space 即チ Hausdorff space デアリ，$T(\omega)$-space ハ $T(1)$-space (regular space) デアリ，$T(\omega^*+\omega)$-space ハ $T(\omega^*)$-space デアル．且ツ両者トモ逆ガ成立スルコトハ定義1ノ注意2ノ示ス所デアル。

〃定理 H＝ヨレバ μ ガ uniform 且 inversible ナ順序型デ且ツ $\mu \neq 0$ ナラバ $T(\mu)$-space R ハ bicompact normal ナ space K＝embed スルコトガ出来ル．従ッテ R ハ completely regular space 即チ $T(\eta)$-space デナケレバナラヌ.〃

事實 $\eta \leqq \mu$ デアル．何トナレバ，モシ μ ナル順序型ヲモツ ordered set I ガ最後ノ要素ヲモツナラバ，ソノ要素ヨリ後ニアル要素ノ順序型ハ 0 デアッテ，μ ガ uniform ナルコトヨリ $\mu=0$ トナリ，$\mu \neq 0$ ニ反スル．ヨッテ I ハ最後ノ要素ヲモタナイ．μ ハ inversible デアルカラ I ハ亦最初ノ要素ヲモ持タナイ。故ニ μ ノ cardinal number $|\mu| \geqq \aleph_0$．ソコデ $\iota_0 \in I$，$\kappa_0 \in I$，$\iota_0 < \kappa_0$ ナル任意ノ ι_0，κ_0 ヲトル．モシ $\iota_0 < \iota < \kappa_0$ ナル $\iota \in I$ ガ存在シナイトスル．然ラバ再ビ μ ノ uniform ナルコトヨリ $\iota_0 < \iota \in I$ ナル ι ノ集合 I_ι ハ μ ナル順序型ヲモツカラ最初ノ要素ヲ有シナイ．シカルニ明カニ I_ι ハ κ_0 ヲ最初ノ要素トスルカラ矛盾デアル．ヨッテ I ハ稠密

デアル．故ニ$\eta \leqq \mu$デアル。

特ニ$|\mu| = \aleph_0$トスレバ Cantor ノ定理ニヨリ$\mu = \eta$デアル．換言スレバ

〝凡テノ有理数ノナス（通常ノ order ニヨル）ordered set ノ順序型ηハ次ノ三ツノ條件ニヨッテ Characterize サレル：

1. uniform デアル．（定義3）
2. inversible デアル（即チ$\eta^* = \eta$）
3. $|\eta| = \aleph_0$．〃

結論．§4マデノ結果ハ定理4系1ヲ除ク外ノ殆ンド凡テ completely regular space ニ関スル性質デアッタノデアル。唯，completely regular space Rニツイテ定理4，系2ノ如キコトが成立スル條件が——系1ヲモ考ヘ併セテ——ηが uniform 且 inversible ナルコトニアル様ニ思ハレル。